Aula 22

Definição: Dada uma matriz A, $n \times n$, a **exponencial matricial** e^A é a matriz $n \times n$ dada pela série

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + A^2\frac{1}{2!} + A^3\frac{1}{3!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Proposição: A matriz solução principal em $t_0 = 0$ associada ao sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo, de coeficientes constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}$$

é dada pela série $I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots$, ou seja

$$Y_{t_0=0}(t) = e^{At}.$$

Consequentemente a solução (única) do problema de Cauchy

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}, \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

é dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0.$$

Proposição: Dadas matrizes A, B, $n \times n$, tem-se

i) Em $t = 0$, $e^{At} = e^{[0]} = I$.

ii) Se

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

é uma matriz por blocos, então e^{At} também é uma matriz por blocos e tem-se

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{A_k t} \end{bmatrix}$$

iii) Se A e B comutam, ou seja, se $AB = BA$ então $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$.

iv) e^{At} é sempre não singular, com inversa $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.

v) Se

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

então

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}.$$

Caso A não diagonalizável

Forma Canónica de Jordan

$$A = SJS^{-1}$$

$$J = \begin{bmatrix} [J_1] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [J_2] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [J_k] \end{bmatrix}$$

Um bloco de Jordan $[J_i]$ por cada vector próprio independente

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

com vectores de base correspondentes

$$A\mathbf{v} = \lambda_i \mathbf{v} \Leftrightarrow (A - \lambda_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$A\mathbf{w}_1 = \mathbf{v} + \lambda_i \mathbf{w}_1 \Leftrightarrow (A - \lambda_i I)\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}$$

$$A\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + \lambda_i \mathbf{w}_2 \Leftrightarrow (A - \lambda_i I)\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1$$

$$\cdots$$

Exponencial da Forma Canónica de Jordan

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} [e^{J_1 t}] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [e^{J_2 t}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [e^{J_k t}] \end{bmatrix}$$

com

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$\lambda = 2$ multiplicidade algébrica $= 2$, geométrica $= 1$.

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = v_2$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Uma só solução linearmente independente da forma $e^{\lambda t}\mathbf{v}$,

$$e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Sistemas Lineares Não Homogéneos

Fórmula da Variação das Constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$$

Teorema (Fórmula da Variação das Constantes): Sejam $A(t), \mathbf{b}(t)$ respectivamente, uma matriz $n \times n$ e um vector $n \times 1$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, o sistema linear de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t),$$

tem solução geral dada pela **Fórmula da Variação das Constantes**

$$\mathbf{y}(t) = X(t)\mathbf{c} + X(t) \int X^{-1}(t)\mathbf{b}(t)dt,$$

em que $X(t)$ é uma qualquer matriz solução fundamental do correspondente sistema homogéneo, e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ uma coluna de constantes arbitrárias.
No caso do problema de Cauchy, com condições iniciais $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, $t_0 \in I$, a solução é dada por

$$\mathbf{y}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 + X(t) \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds.$$

Teorema (Fórmula da Variação das Constantes para A constante):
Quando $A(t) = A$ é uma matriz constante, a exponencial e^{At} pode ser usada no lugar de $X(t)$ obtendo-se, respectivamente, a solução geral

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{c} + e^{At}\int e^{-At}\,\mathbf{b}(t)dt, \qquad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$

e a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}\,\mathbf{b}(s)ds.$$